Course Note Numerical Method : Interpolation

Pengantar Interpolasi.

Kalimat $y = f(x)$, $x_o \leq x \leq x_n$ adalah kalimat yang mengkorespondensikan setiap nilai x di dalam interval $x_0 \leq x \leq x_n$ dengan satu atau lebih nilai-nilai dari y. Anggaplah bahwa $f(x)$ bernilai tunggal, kontinu, dan diketahui dalam bentuk eksplisit, maka nilai-nilai $f(x)$ berkorespondensi dengan tepat dari nilai-nilai x yang diberikan, sebutlah x_0, x_1, x_2, ..., x_n yang dapat dihitung dan ditabulasi dengan mudah.

Ide interpolasi dalam metode numerik muncul ketika pernyataan konversi berikut ini memerlukan tanggapan. Diketahui himpunan dari daftar nilai-nilai (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) yang memenuhi relasi $y = f(x)$ dengan bentuk eksplisit $f(x)$ tak diketahui. Kondisi seperti ini perlu dicari fungsi, sebutlah $\phi(x)$, sedemikian hingga $f(x)$ dan $\phi(x)$ bersesuaian pada himpunan dari daftar titik-titik tersebut. Proses untuk menentukan bentuk $\phi(x)$ atau nilai fungsinya disebut ***interpolasi***. Bila $\phi(x)$ suatu polinom maka proses demikian disebut *interpolasi polinom* dan $\phi(x)$ disebut *penginterpolasi polinom*. Selain polinom, bentuk interpolasi $\phi(x)$ dapat juga berupa deret trigonometri terhingga, deret dari fungsi Bessel, dan lain sebagainya. Di bagian ini diskusi dibatasi pada interpolasi polinom.

A. Interpolasi Liniear

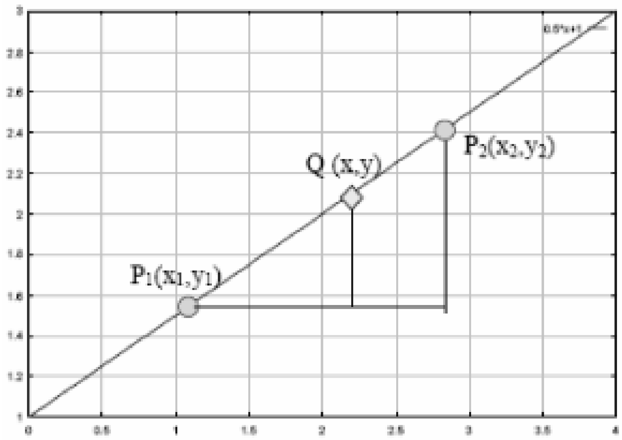
Ide dasar dari interpolasi liniear adalah menggunakan persamaan garis lurus yang melalui dua titik. Misalkan diberi titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2), persamaan garis yang melalui dua titik tersebut adalah :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Sehingga untuk mendapatkan nilai dari suatu fungsi f(x) diperoleh dengan cara :

$$\boxed{f(x) = y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Dengan nilai $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dalam hal ini disebut beda terbagi pertama.



Gambar 1. Ide Dasar Interpolasi Linier

Contoh 1 :

Taksir jumlah penduduk Indonesi di tahun 2011, jika diketahui data penduduk Indonesia sebagai berikut :

Tahun	2010	2012
Jumlah Penduduk	237,641,326	244.775.796

Contoh 2 :

Carilah nilai hampiran dari ln 9,2 jika diketahui ln 9,0 = 2,1972 dan ln 9,5 = 2,2513 menggunakan interpolasi liniear dan tentukan nilai galat dari ln 9,2.

Contoh 3 :

Carilah nilai y untuk titik x = 2.1 yang berada di antara titik (1, 1.5) an (3, 2.5)

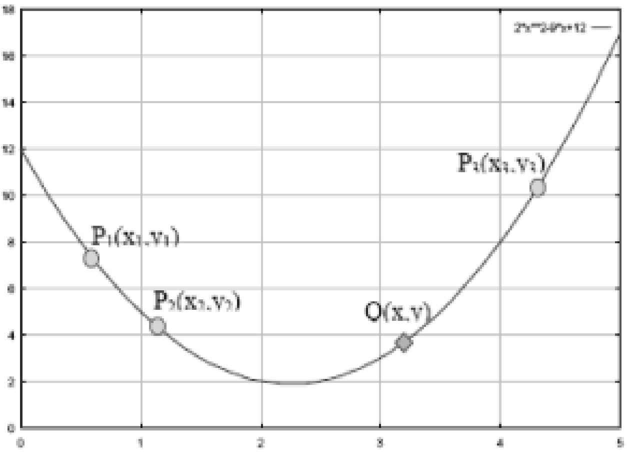
Dari ketiga contoh di atas dapat dibuat algoritma Interpolasi Liniear sebagai berikut

1. Tentukan 2 titik P_1 dan P_2 dengan koordinat masing-masing (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)
2. Tentukan titik x dari titik yang akan dicari
3. hitung nilai y dengan menggunakan rumus : $f(x) = y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
4. Tampilkan nilai titik yang baru

B. Interpolasi Kuadratik.

Interpolasi kuadrat adalah interpolasi yang menggunakan polinom berderajat paling tinggi dua (fungsi kuadrat) dengan kurvanya melalui tiga titik yang diketahui yaitu $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ dan $P_3(x_3, y_3)$. Untuk memperoleh titik Q (x, y) digunakan interpolasi kuadratik :

$$y = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$



Gambar 2. Ide Dasar Interpolasi Kuadratik

Contoh 4 :

Carilah nilai y untuk titik x = 2.5 yang berada di antara titik (1, 5), (2, 2) dan (3, 3)

Contoh 5 :

Carilah ln 9.2 dari ln 8.0 = 2.0794, ln 9.0 = 2.1972 dan ln 9.5 = 2.2513

Dari dua contoh di atas, Algoritma Interpolasi Kuadratik adalah sebagai berikut

1. Tentukan 3 titik $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ dan $P_3(x_3, y_3)$
2. Tentukan titik x dari titik yang akan dicari
3. Hitung nilai y dengan menggunakan rumus

$$y = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

4. Tampilkan nilai titik yang terbaru

C. Interpolasi Polinomial

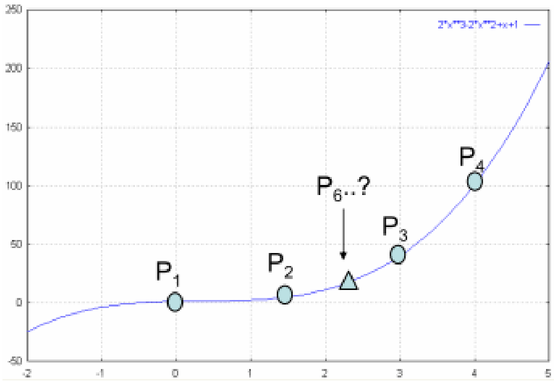
Interpolasi Polinomial adalah interpolasi yang menggunakan polynomial berderajat n – 1 dengan n titik yang diketahui. Titik tersebut adalah $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, … , $P_n(x_n, y_n)$.

Persamaan polynomial berderajat n – 1 yang dimaksud adalah sebagai berikut :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

Masukkan nilai dari setiap titik ke dalam persamaan polynomial di atas, diperoleh persamaan simultan dengan n persamaan dan n variabel bebas sebagai berikut :

$$y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^{\ 2} + a_3x_1^{\ 3} + \ldots + a_{n-1}x_1^{\ n-1}$$
$$y_2 = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^{\ 2} + a_3x_2^{\ 3} + \ldots + a_{n-1}x_2^{\ n-1}$$
$$y_3 = a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^{\ 2} + a_3x_3^{\ 3} + \ldots + a_{n-1}x_3^{\ n-1}$$
....
$$y_n = a_0 + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-1}^{\ 2} + a_3x_{n-1}^{\ 3} + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^{\ n-1}$$



Gambar 3. Ide Dasar Interpolasi Polynomial

Contoh 6 :

Cari nilai y untuk titik x = 3 yang berada di antara titik-titik (3.2, 22), (2.7, 17.8), (1, 14.2), (4.8, 38.3) dan (5.6, 5.17).

(Catatan : dari hasil perhitungan diperoleh a = -0.5275, b = 6.4952, c = -16.117, dan d = 24.3499)

Dari contoh di atas, dapat di buat algoritma Interpolasi Polynomial

1. Menentukan jumlah titik n yang diketahui
2. Memasukkan titik-titik yang diketahui P_i (x_i , y_i) untuk i = 1, 2, 3, ..., n
3. Menyusun matrik yang diperluas / matriks lengkap (augmented matriks) dari titik-titik yang diketahui sebagai berikut :

$$J = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & x_1 & x_1^{\ 2} & \ldots & x_1^{\ n-1} & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^{\ 2} & \ldots & x_2^{\ n-1} & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^{\ 2} & \ldots & x_3^{\ n-1} & y_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^{\ 3} & \ldots & x_n^{\ n-1} & y_5 \end{array}\right]$$

4. Menyelesaikan persamaan simultan dengan matriks lengkap di atas dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan

5. Menyusun koefisien fungsi polynomial berdasarkan penyelesaian persamaan simultan di atas. $a = \{a_i \mid a_i = J(i,n) : 0 \le i \le n-1\}$
6. Memasukkan nilai x dari titik yang diketahui
7. Menghitung nilai y dari fungsi polynomial yang dihasilkan
8. Menampilkan titik (x, y)